

SketchUp 應用於複合形體體積「切割」 與「填補」輔助解題效果之研究

蔡東鐘

副教授

國立臺東大學教育學系

E-mail: tsaidj@cc2k.nttu.edu.tw

遲銘仁

碩士

國立臺東大學教育學系

摘要

本研究旨在探討 Google SketchUp 輔助學童學習複合形體體積的「切割」與「填補」解題方法與錯誤類型，以提升學童對複合形體體積的解題能力。研究對象為五位五年級學童，採行動研究方法進行六個複合形體體積單元課程教學，透過觀察、訪談、學習單蒐集相關研究資料。研究結果發現，學童欠缺體積保留及測量概念，在「分割」及「填補」解題錯誤中，以遺漏計算其他切割的體積及無法判斷複合形體的底面為主；在「分割」及「填補」解題方法上，學童主要採用直接觀察的立體圖形法判斷。透過 Google SketchUp 輔助教學後，可幫助學童發展出自己的解題策略，在「分割」及「填補」解題錯誤類型中獲得澄清，而在「分割」及「填補」解題方法上，學童改以底面圖形判斷，具有將複合形體分解成個別體積的能力，提升在複合形體體積上的解題能力。

關鍵字：複合形體體積、數學體積單元



壹、緒論

複合形體體積是令學童感到頭痛的學習單元，對空間概念較缺乏的學童而言是很大困擾。學童常因體積概念不足，解題時，將體積和表面積二者混淆，算式繁雜造成計算負擔而產生挫折感，是學童學習數學歷程中的惡夢（陳鴻綸、曹雅玲，2005）。

立體幾何空間是比較抽象的概念，指導空間感較弱的學童，只靠傳統繪圖方式或教具，無法適當解釋幾何空間的概念，將導致學習效果不佳（姚文仁，2007），因為學童很難從平面透視圖形聯想到實際的立體形狀（陳禾凱，2016），所以需要高層次體驗和空間視覺化的工具輔助（Erkoc & Erkoc, 2012），才能有效協助學童學習相關概念。

雖然實體模型能讓學生體會空間感，但製作複合形體模型要付出不少時間和精力，使用上也缺乏彈性應用的方便性（陳姜穎，2005），若以合適的 3D 軟體繪製視覺化實體模型，將有助於學童對立體圖形的認知（陳禾凱，2016），運用 3D 繪圖軟體的視覺刺激功能，對立體幾何教學輔助效果，除了可以提升學童 3D 可視化能力，也是師生教學過程中互動討論的有效媒材（Oldknow & Tetlow, 2008），讓學童明白體積形體的組成，藉此改變學習方式，提高學習動機與興趣。Google SketchUp（以下簡稱 SketchUp）是一套適用於幾何空間教學的 3D 繪圖軟體，能夠簡單地使用推、拉、旋轉、翻轉等功能，讓教師專心於數學教學內容製作（林佳蓉、林祐鉅、陳久正，2013）。

基於上述研究動機，本研究目的旨在瞭解國小學童學習複合形體使用「切割」與「填補」的解題方式與錯誤類型，探討 SketchUp 輔助學童應用「切割」與「填補」解決複合形體體積問題的作法，進而分析 SketchUp 教學應用的效果。

貳、文獻探討

一、SketchUp 教學適用性

繪圖軟體在教學適用性選用原則，可從操作性、互動性、表徵性三方面來決定（左臺益，2012），依此原則可選用的繪圖軟體，以平面幾何教學軟體較多，立體幾何教學軟體較少，適用的 3D 繪圖軟體有 GeoGebra、萬用揭示板、Cabri 3D、虛擬教具圖書館與 SketchUp（吳重言，2013）。其中，SketchUp 與 Cabri 3D 符合前述選用原則，這二套軟體功能特性相近，但 Cabri 3D 非免費軟體，而 SketchUp 有完整功能且是免費軟體。

SketchUp 具有操作簡單、構圖迅速、功能強大、運用靈活等特色（謝國燁，

2007；林佳蓉、林祐鉅、陳久正，2013），可繪製直線、圓弧、多邊形、正多面體、圓柱、建立複合形體等，利用滑鼠對立體圖像進行推、拉、切換視角、翻轉、移動來變換立體視角等功能。許多研究結果顯示，SketchUp 適用在學校數學幾何教學，學童能輕易操作，透過翻轉立體圖形、切換視角、產生透視圖及具有積木堆疊的功能，能快速建立複合形體，將抽象化的複合形體轉成視覺化，加強學童之空間視覺能力，以及「切割」與「填補」解題能力，可有效達成學習效果（施保成，2011）。

本研究旨在探討學童複合形體體積「切割」與「填補」的解題能力，SketchUp 為免費軟體，且具有簡易操作的特性，相關研究指出其應用於幾何教學效果佳，因此，本研究採用 SketchUp 作為輔助教學工具。

二、3D 繪圖軟體教學應用效果

資訊科技運用於數學教學，可營造學習目標的情境，引發學童主動學習、參與課堂練習，促進學童的學習成就感，有利於學習的長期記憶（王全興，2007）。

3D 繪圖軟體在視覺化發展上是很有利的工具，電腦產生的圖像能激勵學童視覺化思考，有利幾何概念上的學習（李俊儀、袁媛，2004），3D 繪圖軟體應用在立體旋轉空間定位能力，對立體空間組織能力的表現有顯著影響（莊振中，2004），SketchUp 具有相同特性，對學習者空間能力有顯著影響（楊志偉，2012）。

比起操作傳統教具，使用 3D 電腦軟體的學生，其幾何空間學習成效及可視化能力均優於傳統教學（Baki, Kosa & Guven, 2011；Oldknow & Tetlow, 2008），因為以動態方式拉出立體形體，可吸引學生具體注意立體形體呈現方式，補足想像力不足的問題（進學國小，2016）。

空間可視化能力代表操縱、旋轉、改變圖形位置的能力，是幾何教育的重要能力，可以將 SketchUp 應用於幾何教育來提高這種能力（Kurtulus & Uyan, 2010），並協助學生處理抽象思考問題，讓學生可以使用 SketchUp 輔助幾何問題的抽象思考，當學生建立正確概念後，即可不需藉助 SketchUp（陳冠宇，2012）。此外，SketchUp 可解決學生對複合形體的觀點，運用相關軟體，透過可視化的操作，使學生自行組合生成對空間的想法，是學習體積的溝通媒介（Panorkou & Pratt, 2016），也影響學生的創意表達。

由此可見，繪圖軟體應用於教學，可輔助教師教學，減低教學準備負擔，有助於達成教學目標，亦能幫助學生增加學習動機與成效，達到學習目標。因此，採用 3D 繪圖軟體應用於教學上是可行的。

三、學童複合形體體積的學習問題

學童在學習體積單元時，往往認為「體積」只是公式及三個數量相乘的結果，卻無法對「體積」做出相關的描述，顯示學童在學習歷程中多為死記公式作答，忽略基本概念而誤導學習效果（譚寧君，1997），這對學童往後解決複雜的複合形體問題沒有助益，甚至有不良的影響。

幾何教學的課程偏重算術（楊凱翔、葉淑珍、譚寧君，2014；黃雅琪，2007），和日常生活少有關聯（陳鴻綸、曹雅玲，2005；黃雅琪，2007），學童在學習「體積」單元時，容易質疑：「學它們做什麼？」（鄭美玲，2015）。在未理解幾何圖形結構之下，直接使用公式符號教學，只會讓學童重視記憶體積公式，依賴公式解決問題，卻無法理解體積公式的由來，甚至混淆體積和表面積公式（陳鴻綸、曹雅玲，2005；黃雅琪，2007），一旦遇到非例行性問題，就不易發展解題策略成功解題（楊凱翔、葉淑珍、譚寧君，2014）。

學習體積概念常見的幾項困難（譚寧君，1997），包括：（1）對受測量體積缺乏基本認識，不知體積是物件所占空間的大小；（2）體積概念保留性不足；（3）對體積的概念建立在視覺上，而不是堆疊；（4）體積點數受空間能力的影響；（5）重視公式記憶，忽略概念瞭解。

學生缺乏對空間測量的基本概念及對其關係的理解（Sisman & Aksu，2016），對體積保留概念相關研究指出，體積分割與合成、體積變形等概念，仍有近 20% 的四、五年級學童不具有保留概念或存有迷思（葉麗鳳，2008），體積概念對學生來說是抽象的，學生常是盲目建立立體心像而非實際理解意義，因此碰到更複雜、非例行性的問題就無法成功解題（Battista, 2004）。

學童常以似是而非的相關數學觀念處理體積概念，造成解題困難，甚至誤用的情形，要澄清體積的迷思概念，必須使用合適的工具及教學法，以建立正確的立體心像，協助學童解決體積問題的處理。

參、研究方法

為解決學童學習複合形體體積的困擾，本研究運用 SketchUp 輔助學童學習複合形體體積的概念，以改善學童在複合形體的學習效果。透過教學觀察、錄影、錄音及訪談等相關資料的蒐集，在實施教學期間，與專家同儕交流想法，針對課程與評量等資料活動進行討論。研究團隊共同討論能幫助研究者自我省思、修正教學過程、檢討學童的解題方法與錯誤類型，以確認學童在複合形體體積「切割」與「填補」的解題能力。

一、研究對象

研究對象為五名五年級學童（三位男生，代稱為 S1、S2、S3，和二位女生，代稱為 S4、S5），這五位學童的幾何概念分析如下：（S1）基本運算能力尚可，計算過程易出錯，幾何空間能力尚可；（S2）數學應用問題的題意理解能力弱，數學理解能力及立體空間概念能力尚可，不愛思考，遇到抽象幾何問題顯得相當吃力，甚至無法回答；（S3）語言表達能力、理解能力及幾何空間能力稍弱；（S4）立體空間概念能力不足，排斥數學體積相關單元，遇到不會的體積問題時，大多跳過不去思考，較無法思考抽象概念；（S5）幾何空間能力方面尚可，數學解題粗心大意。

二、教學輔助工具

本研究以 SketchUp 為教學輔助工具，應用的功能包括：（1）翻轉：從不同方位角度瞭解立體圖形結構，如圖 1 所示；（2）切換視角：將 3D 立體圖形切換成俯視圖、正視圖、後視圖、左視圖與右視圖等角視圖，如圖 2 所示；（3）表面著色：計算「凹」「凸」型複合形體體積時，可在表面著色以提升學童在「切割」與「填補」辨別能力，如圖 3 所示；（4）推拉：可在立體圖形表面推拉「凹」「凸」型，如圖 4 所示；（5）積木堆疊：可將複合形體轉換成簡單立體圖形，如圖 5 所示。

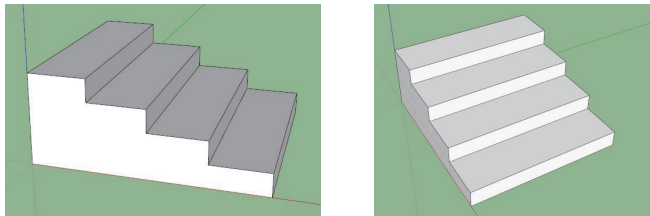


圖 1 翻轉（環繞）功能圖

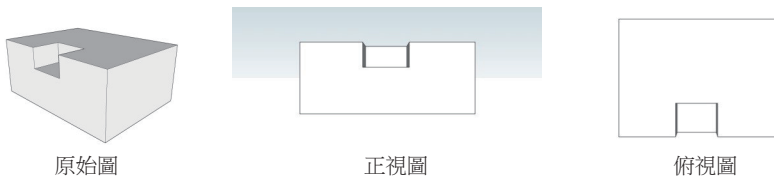


圖 2 切換各個角視圖

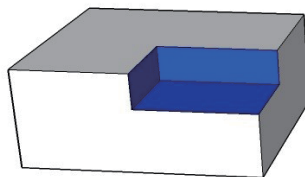


圖 3 複合形體「凹」「凸」表面著色

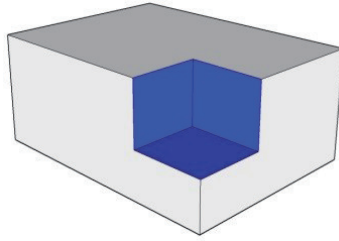


圖 4 立體圖形表面運用推拉功能

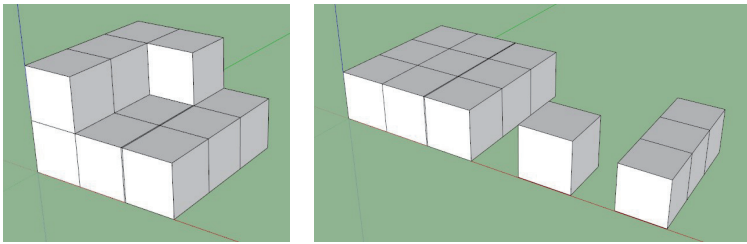


圖 5 積木堆疊功能

三、資料蒐集、整理與分析

(一) 資料蒐集

資料蒐集方式包括訪談、觀察、評量等方法，資料蒐集工具包括自編的複合形體體積測驗、教學觀察紀錄表、教師省思日誌、學生訪談紀錄表。

1. **訪談**：瞭解學童複合形體體積「切割」及「填補」學習情況，分別在前後測、課後與學童進行訪談。

2. **觀察**：觀察學童學習狀況，記錄教學現場中學童的口語和學習行為，作為修正教學之參考。

3. **前後測、學習單**：前後測為瞭解學童複合形體體積「切割」及「填補」解題能力的改變，測驗題型相同，只在長度及體積外觀上變化；學習單用來檢視學童達到學習目標的程度。

(二) 資料整理

研究資料以代碼編號建檔，編號型式為【資料來源 - 蒐集方式 - 流水號】，例如：【T01- 思 -001】表示流水編號 001 的教學者教學省思資料；其他編號代碼意義如表 1 所示。

表 1 研究資料編號代碼意義表

資料類型	代碼	代碼意義
資料來源	TS	教學研究團隊，包括教學者與二位協同研究者
	T	教學者
	A、B	二位協同研究者
	S1 ~ S5	五位學生
蒐集方式	觀	教學觀察
	思	教學省思
	訪	訪談紀錄
	討	研究團隊討論，教學者與二位協同研究者的討論
	前	前測
	後	後測
流水號	001 ~ 999	以三位數字代表，由 001 起編，依序累加。

(三) 資料分析

資料分析採主題分析法，分析程序包括閱讀、選擇、呈現與解釋。(1) 仔細閱讀相關研究資料，以回想教學上或學童學習上所呈現的事件與經驗；(2) 把資料區分為重要或不重要，並集中相似的資料、簡化複雜的資料；(3) 選擇欲呈現的資料，並以簡單明瞭的方式來呈現；(4) 將分析得來的資料加以檢驗，並解釋互相關係，以求資料的客觀，得到合理的解釋。

肆、研究結果與討論

一、行動研究前學童複合形體體積解題能力分析

行動研究課程實施前，瞭解學童學習複合形體體積的困難，將 SketchUp 融入學習活動中，調整學童理解複合形體問題的方式，以提高學習效果。

(一) 學童複合形體體積答題狀況

以自編前測試卷檢視學童複合形體體積解題相關概念。表 2 為五名學童前測試題答對題數與正確率，按學童編號依序答對 17 題、18 題、16 題、11 題、16 題，正確率為 72%、60%、64%、44%、64%。

表 2 學童複合形體體積教學前能力測驗答題表現

	S1	S2	S3	S4	S5
先備知識正確率	87%	73%	80%	60%	80%
進階知識正確率	0%	60%	40%	20%	60%
銜接知識正確率	100%	20%	40%	20%	20%
總答對題數	18	15	16	11	16
答題正確率	72%	60%	64%	44%	64%

診斷五位學童複合形體體積先備知識，歸納其複合形體體積知識如下：

1. 先備知識：五名學童具備體積基礎概念，但在基礎複合形體體積解題概念仍有錯誤，「切割」及「填補」解題錯誤類型多為計算錯誤。【TS- 討 -001】

2. 進階知識：五名學童中 S1 及 S4 體積概念均有問題，S1、S2 及 S3 在計算積木點數問題體積測量概念有錯誤，主要錯誤是遺漏其他切割體積及無法將複合形體分解算出個別體積。【TS- 討 -002】

3. 銜接知識：S1 五題全部答對，其他四位學童在複雜的複合形體體積解題概念需加強，銜接知識的主要困難為無法辨別複合形體底面圖形。【TS- 討 -003】

由此可見，學童的複合形體體積概念仍無法具體分解複雜結構，且體積保留概念薄弱，難以判斷解題方法。

(二) 學童複合形體體積解題方法及錯誤類型

完成前測後，訪談五名學童在試題答題情形，以瞭解學童解題方法、錯誤原因及相關概念狀態。

1. 先備知識

五名學童前測「先備知識部份」15 題試題中，對於答題情形、解題方法及訪談進行分析並記錄於表 3。由表 3 可見，學童在題號 1、2、3、5、7、8 等 6 題先備知識試題反應，除 S4 在第 3 題，把「立方公尺」、「立方公分」和「平方公尺」、「平方公分」的關係搞混外，幾乎全部答對，表示五名學童在體積基本概念是清楚的。

表 3 學童前測「先備知識」答題表現

題型	解題方式	題號	前測				
			S1	S2	S3	S4	S5
判斷體積大小	體積概念	1	O	O	O	O	O
	體積概念	2	O	O	O	O	O
立方公尺、立方公分的關係	體積概念	3	O	O	O	X	O
底面積與高的關係	體積概念	5	O	O	O	O	O

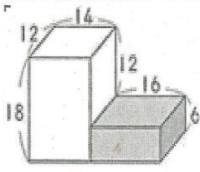


積木點數	切割或填補	7	0	0	0	0	0
	體積概念	8	0	0	0	0	0
柱體體積計算	體積公式	9	X	0	0	0	0
	底面積乘高	10	0	0	0	0	X
	底面積乘高	15	0	0	0	0	0
	切割或填補	11	0	X	X	X	X
複合形體體積計算	切割	12	0	X	X	X	0
	切割或填補	13	X	X	0	X	X
	切割	14	0	X	0	X	0
	切割或填補	16	0	0	X	0	0
	切割或填補	17	0	0	0	X	0
先備知識正確率		87%	73%	80%	60%	80%	

註：O 表示答對，X 表示答錯。

但學童在複合形體體積「先備知識」試題反應就有錯誤，茲列舉學童 S1 在前測「先備知識」的解題方法與錯誤類型分析紀錄示例如表 4，餘摘要如表 5 所示。

表 4 學童 S1 前測「先備知識」解題方法與錯誤類型

題號	解題記錄與訪談對話	解題方法與錯誤原因
13	<p>算出下面形體的體積。(單位:公分)</p> 	<p>解題方法： 立體圖形判斷、切割法。 錯誤原因：計算時，粗心大意，計算錯誤。</p>
	<p>解題過程：$14 \times 8 \times 18 = 3024$，$16 \times 12 \times 6 = 192$，$3024 + 192 = 3216$。 師生訪談對話記錄 (S1- 前訪 -006)</p>	
T1	S1	
	Q：你用什麼方法求複合形體體積？	A：我用切割法，把物體切成兩個長方體。
	Q：解題中 $14 \times 8 \times 18 = 3024$ 表示什麼？	A：白色長方體的體積。
	Q：解題中 $16 \times 12 \times 6 = 192$ 表示什麼？	A：灰色長方體的體積。
		A：呀...少乘到 6。
	Q： $3024 + 192 = 3216$ 式子是表示什麼？	A：兩個體積相加。

由表 5 發現學童前測「先備知識」解題方法，「切割」法都選擇立體圖形判斷，只有 1 題選擇主要底面圖形判斷來解題。「填補」解題幾乎都選擇立體圖形

判斷，只有 1 題選擇主要底面圖形判斷和面積與高的關係。

S4 學童在此部份則有 2 題空白未寫。「切割」解題的錯誤類型，主要是計算錯誤，其次是錯寫體積單位；「填補」解題的錯誤類型，也是計算錯誤為主，其次是未求出缺口填補的體積、體積單位錯寫成平方單位，及無法求出缺角的長方體體積等。

表 5 學童在前測「先備知識部份」解題方法與錯誤類型分析彙整表

選擇方法	題目特徵	解題方法	總用題數	錯誤類型	總錯題數
切割	凸型複合形體	主要立體圖形判斷	12	算式正確但計算錯誤。	4
	凹型複合形體			體積單位錯寫成平方單位。	2
	L 型複合形體	體積單位錯寫成長度單位。		1	
	凸型複合形體	主要底面圖形判斷		1	求出底面積，忽略未乘到「高」。
填補	凹型複合形體	主要立體圖形判斷	14	算式正確但計算錯誤。	3
	L 型複合形體			未求出缺口填補的體積。	2
	凹型複合形體	主要底面圖形判斷 + 底面積 × 高		1	無。
空白未寫	凹型複合形體 (缺角型)	空白未寫	2	無法求出缺角的長方體的體積，導致無法解題。	2

2. 進階與銜接知識

學童前測的「進階與銜接」10 題試題結果如表 6。其中，進階 5 題答對率，按數學童編號依序分別為 0%、60%、40%、20%、60%；銜接 5 題答對率，依序分別為 100%、20%、40%、20%、20%。五名學童在進階與銜接 10 題試題的複合答對率不高。

表 6 學童前測「進階、銜接知識」答題表現

題型	解題方式	題號	前測				
			S1	S2	S3	S4	S5
立方公尺、立方公分的關係	體積概念	4	X	O	X	X	O
積木點數	切割或填補	6	X	X	O	X	O
	切割或填補	18	X	O	O	O	X
長方體及正方體堆疊	切割或填補	19	X	O	X	X	O
	切割或填補	20	X	X	X	X	X
進階部份正確率			0%	60%	40%	20%	60%
底面為三角形、平行四邊形、梯形相互堆疊或相減	切割	21	O	O	O	O	X



Z、V 字型	切割或填補	22	O	X	X	X	X
	切割或填補	23	O	X	O	X	X
	填補	24	O	X	X	X	O
	填補	25	O	X	X	X	X
銜接部份正確率			100%	20%	40%	20%	20%

註：O 表示答對，X 表示答錯。

學童前測「進階與銜接部份」解題方法，在「切割」法中，選擇主要立體圖形判斷，其次是主要底面圖形判斷和面積與高的關係；「填補」法主要選擇底面圖形判斷和面積與高的關係來解題，此部份有 9 題空白未寫（見表 7）。

「切割」解題錯誤類型，主要為遺漏計算其他切割體積，其次是無法將複合形體分解算出個別體積，以及求算三角形面積時公式錯誤，少了除 2 的步驟等錯誤；「填補」解題錯誤類型，主要為求算三角形面積時公式錯誤，少了除 2 的步驟。

表 7 學童前測「進階與銜接」解題方法與錯誤類型彙整表

選擇方法	題目特徵	解題方法	總用題數	錯誤類型	總錯誤數			
	數個長方體及正方體堆疊	主要立體圖形判斷	14	遺漏計算其他切割體積。	4			
				無法將複合形體分解算出個別體積。	2			
				個別體積併計錯誤。	1			
				算式正確，但計算錯誤。	1			
切割	數個長方體及正方體堆疊	底面圖形判斷、 底面積 × 高	10	三角形面積，少了除 2 步驟。	2			
				無法依題目提供的條件判斷，將複合圖形先做正確的分解。	1			
				求出底面積，忽略未乘到「高」。	1			
				不加思考辨別底面圖形錯誤。	1			
填補	底面堆疊或相減 Z、N 字型 V 字型	底面圖形判斷、 底面積 × 高	7	三角形面積，少了除 2 步驟。	3			
	空白未寫			Z 或 N 字型	空白未寫	9	無法辨別底面圖形。	9

綜合以上討論，學童在簡單及可判別複合形體部分，運用「切割」法大多是選擇主要立體圖形判斷來解題，相對的，若是學童不易判別的複合形體題型，會選擇主要底面圖形判斷，以及面積與高的關係來解題；而「填補」法的使用，大多選擇主要立體圖形判斷來解題，若是學童不易判別的複合形體，學童會選擇主

要底面圖形判斷，以及面積與高的關係來解題；前測部份空白未寫的題型，大多是學童不易判別的複合形體，共有 11 題。

五名學童前測「切割」及「填補」解題錯誤類型彙整如下表 8。

表 8 學童複合形體教學前錯誤類型彙整表

選擇方法	題目特徵	錯誤類型	總錯題數
切割	凹型複合形體	計算錯誤。	5
	凸型複合形體	遺漏計算其他切割體積。	4
	L 型複合形體	無法將複合形體分解。	2
	數個長方體及正方體堆疊而成的複合形體體積	體積單位錯寫成平方單位。	2
		體積單位錯寫成長度單位。	1
		個別體積併計錯誤。	1
	凸型複合形體	算底面積忽略未乘到「高」。	2
	數個長方體及正方體堆疊而成的複合形體體積	算三角形面積時，公式少除 2。	2
	底面為幾何圖形相互堆疊或相減組合而成的複合形體	無法依題目提供的條件判斷，將複合圖形先做正確的分解。	1
	V 字型複合形體	不加思考辨別底面圖形錯誤。	1
	填補	凹型複合形體	計算錯誤。
L 型複合形體		未求出缺口填補的體積。	2
		體積單位錯寫成平方單位。	2
凹型複合形體		算三角形面積時，公式少除 2。	3
底面為幾何圖形相互堆疊或相減組合而成的複合形體			
Z、N 字型複合形體			
V 字型複合形體	無法求出缺角的長方體的體積，導致無法解題。	2	
凹型複合形體			
空白未寫	底面為三角形及平行四邊相互相減組合而成的複合形體	無法辨別底面圖形。	9
	Z、N 字型複合形體		

歸納表 8 資料發現，「切割」法解題的錯誤類型，若學童選擇主要立體圖形判斷來解題，最常發生的錯誤類型為，算式正確但計算錯誤、遺漏計算其他切割的體積，其次為無法將複合形體分解算出個別體積、體積單位錯寫成平方單位、體積單位錯寫成長度單位，以及個別體積併計時計算錯誤等。學童若選擇主要底面圖形判斷，以及面積與高的關係來解題，錯誤類型是求出底面積，忽略未乘到「高」、求算三角形面積時公式錯誤，少了除 2 的步驟、無法依題目提供的條件判斷，將複合圖形先做正確的分解，及不加思考辨別底面圖形錯誤等。

「填補」法解題的錯誤類型，若學童選擇主要立體圖形判斷來解題，最常發



生的錯誤類型是，算式正確但計算錯誤，其次為未求出缺口填補的體積，及體積單位錯寫成平方單位；若學童選擇主要底面圖形判斷，以及底面積與高的關係來解題，錯誤類型為求算三角形面積時公式錯誤，少了除 2 的步驟。

學童空白未寫部份，大多是不易判別的複合形體，主要原因是無法辨別底面圖形；其中，S4 學童無法求出缺角的長方體的體積，導致無法解題。

綜合前測學童最常發生的錯誤類型，包含無法辨別底面圖形，以及算式正確但計算錯誤，而學童無法辨別底面圖形的主要原因是無法分解複合圖形，學生在學習複合面積時，可用輔助線區分圖形的合成與分解，但複合體積無輔助線，需要學童自行判斷底面圖形，判別出複合圖形合成及分解。

二、複合形體體積教學設計與實施

本研究基於學童學習體積概念常見的困難，設計教學活動以強化學童概念性理解，教學內容包含六個教學單元，單元一、二、三為基礎複合形體體積教學，內容為複合面積、柱體體積及複合形體體積；單元四為進階的複合形體體積教學；單元五、六為銜接的複合形體體積教學。各單元教學活動內容包含活動設計、評量、教學實施與反省等行動研究歷程，以提升學生在複合形體體積上的解題能力，教學單元名稱與教學目標如表 9 所示。

表 9 教學單元與教學目標摘要表

教學單元	教學目標
一、複合面積	複習切割與填補計算複合平面圖形面積解題。
	認識 SketchUp 的直線、四邊形及推拉等基本功能操作。
二、柱體體積	瞭解基礎柱體體積解題技巧。
	瞭解體積單位「立方公分」及「立方公尺」間的關係。
	瞭解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。
三、複合形體體積	認識 SketchUp 的著色、切換視角及旋轉功能。
	會運用切割與填補計算基礎複合形體體積解題。
	會應用 SketchUp 繪製凹、凸型複合形體。
	會應用 SketchUp 切換視角功能。
四、進階複合形體體積	會分解數個長方體或正方體堆疊或相減組合的複合形體。
	理解複合形體體積計算原則，算出個別體積再併計。
	會應用 SketchUp 相關功能觀察複合形體。
五 / 六、銜接的複合形體體積	會分解 V、Z 或 N 字型的複合形體，算出個別體積再併計。
	會應用 SketchUp 功能觀察 V、Z 或 N 字型的複合形體。



單元一：複合面積

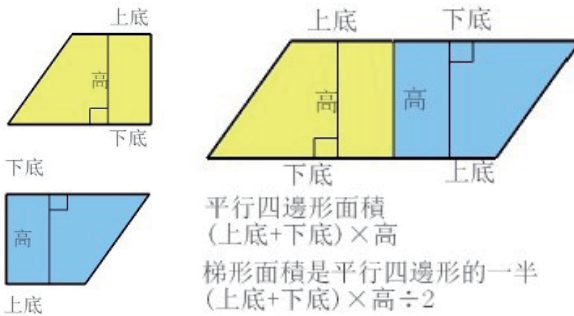
(一) 學習問題診斷

學童前測的進階和銜接答題狀況大多不盡理想，複合面積教學目的在於引導學童對面積公式的理解，因為複合面積與體積的概念是相互關連的，透過複合面積的複習活動，學童在複合形體體積計算時可以自然產生遷移學習的效果。

(二) 教學活動設計及修正

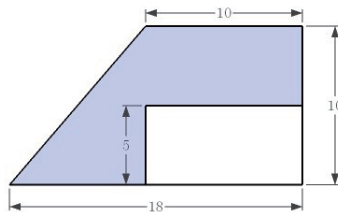
在面積問題上，學童最常發生的錯誤是求三角形面積時少了除 2 的步驟，因此，在複合體積教學前先複習面積教學活動，以協助學童學習複合形體體積。活動步驟與內容如下：

1. 詢問學童：各個圖形面積公式及長度單位換算。
2. 教師操作 SketchUp 示範梯形公式的由來。

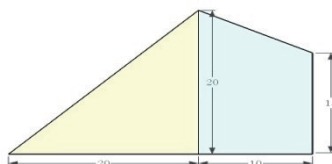


3. 複合圖形面積教學。

- (1) 教師操作 SketchUp 示範複合圖形面積教學。



- (2) 學習單：練習複合圖形面積計算。



4. 認識 SketchUp 功能教學。

- (1) 下載 SketchUp 及安裝示範。
- (2) 認識 SketchUp 直線、四邊形及推拉等基本功能。

5. 綜合活動

- (1) 操作 SketchUp 直線、四邊形及推拉等基本功能。
- (2) 評量測驗。

完成教學活動設計後，研究團隊討論改進內容，修正教學內容。

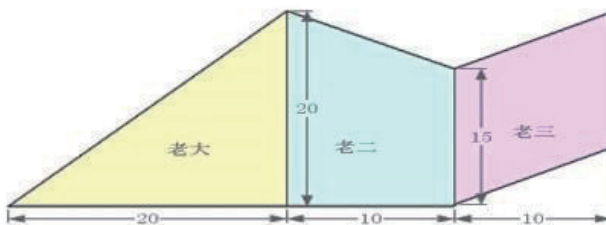
T：面積概念是屬於複習的部分，限於時間考量無法重頭開始引入，我只能針對前測中的錯誤進行澄清。

A：我看了前測中的錯誤，有部份學童無法將複合圖形先做分解再算面積，會影響到學童無法將複合圖形先分解算出個別體積後再併計。

B：學習單修改成三個不同的圖形，讓學童能清楚分解此題複合圖形。

(T-思-001)。

老李有塊地分給 3 個孩子，土地畫分如下。由左到右依序分給老大、老二和老三。請問孩子分到土地面積各是多少？哪個孩子分到土地面積最大？



T：為什麼不併計？

A：老李的土地是複合圖形，不併計是為了讓學童瞭解老李的土地是由三個不同的圖形分解所組成，這單元的重點是要提升學童往後學習複合形體體積的保留概念。

(TS-討-101)

學童若未具備體積保留概念，則無法進行體積的間接比較，也無法計算體積 (Piaget & Inhelder, 1974)。

學童已學過複合面積計算，這個單元對學童是不陌生的，但學童在前測中辨別底面圖形、複合圖形的分解思考仍有錯誤，A 老師的考量是在此單元的複習活動時再將指導複合圖形分解的概念，讓學童清楚釐清。(TS-討-102)

複合面積解題能力會影響到學童對複合體積的學習，二者環環相扣，A 老師認為，先讓學童清楚分解複合圖形，以利學童往後學習複合形體體積的保留概

念，提升辨別複合形體底面的能力。

(三) 教學情況及過程

瞭解學童先備知識後，研究者以講述方式，複習已學過的圖形面積公式。

T：你們學過的面積公式？

S1：老師，我知道有正方形、長方形、三角形。

S5：平行四邊形。

T：對！誰可以告訴我正方形及長方形的面積要如何計算？

S4：正方形是邊長乘以邊長，長方形是長乘以寬。

T：S2，可以告訴老師你會怎麼求三角形的面積？

S2：底乘以高然後還要除 2。

S1：老師！還有梯形也是要除以 2。

T：嗯！那 S3 可以跟我說梯形面積公式嗎？

S3：上底加下底乘以高除 2。

T：那有誰知道梯形公式是怎樣來的？

(此時，學童們靜靜的看著研究者並搖著頭。)

S1：老師，我不知道。

(TS- 討 -101)

接著以 SketchUp 示範面積公式推導過程，協助學童回憶面積公式。學童對教師使用 SketchUp 的感覺是好奇的，研究者使用 SketchUp 講解梯形公式的推導。

T：把黃色梯形複製一個同大小的藍色梯形。顛倒後給合在一起，你們發現什麼？

S2：變成平行四邊形。

T：梯形和平行四邊形的面積有什麼關係？

S3：很像是一半。

T：答對了，梯形是平行四邊形一半。平行四邊形的面積是不是(上底+下底)×高。

T：所以梯形面積是(上底+下底)×高÷2。

S1：老師，就這樣來的。

S4：哦！（笑笑點點頭）。

(TS- 觀 -002)

多數學童的複合面積先備知識是清楚的，只有部份學童無法將複合圖形先分解再算面積，學習單的複合圖形有輔助線清楚分成三個基礎圖形，唯中間的梯形旋轉 90 度，造成某些學童辨別上的困難，讓學童透過 SketchUp 操作使用，可以清楚看出形體的組成。

單元二：基本柱體體積

（一）學習問題診斷

學童在積木數量計算及「立方公分」及「立方公尺」單位換算有困難。積木數量題型本質上即是複合形體問題，發生錯誤的學童皆以直觀法來判斷，要如何設計教學以提升學童解題能力？

分析錯誤的解題歷程發現，學童無法清楚計算積木點數，是因為積木被遮住，增加計數困難度，另外，學童還需具備分層計數的概念才能正確計數出積木的數目。（TS-後-204）

（二）教學活動設計及修正

積木點數的計算需要具備空間能力，所以空間展示活動能協助學童建立空間感（林芳姬、姚如芬，2005）。本單元運用 SketchUp 的空間展示效果，協助學童計算積木數量。活動流程如下：

1. SketchUp 示範積木計算教學。

2. 講解範例：前測第 6 題。

3. 基礎柱體體積：教師操作 SketchUp 示範基礎直柱體體積教學。

（1）講解範例：長方體長 4 公尺、寬 2 公尺、高 500 公分，這個長方體的體積是多少立方公尺？

（2）學習單：學童練習柱體體積計算。

大大建築公司買了一塊木材，長 6 公尺、寬 2 公尺、高 700 公分，這一塊木材的體積是多少立方公尺？也是多少立方公分？

4. 認識 SketchUp 著色功能、切換角視圖及旋轉功能。

5. 綜合活動：

（1）操作 SketchUp 著色功能及旋轉功能。

（2）評量測驗。

完成教學活動設計後，研究團隊討論改進內容，修正教學內容。

T：前測中學童在複雜形體的積木點數計數方面有問題，還有少數學童在計算「公分」及「公尺」「立方公分」及「立方公尺」換算較粗心。

T：前測可看出學童已有體積保留概念，在體積相關的比較是沒問題的，學習單上多加了工人把它分成 6 份，再詢問學童總體積，老師的用意是？

A：學童已經有體積保留概念，但在複合形體相關的體積概念上，有些學童是模糊和錯誤的。下個單元就要進行複合形體的體積教學，我的用意是在學習單上換個提問方式再測試體積保留觀念，目的是要提

升學童的體積保留觀念。

A：我考慮到部分學童的學習狀況仍不穩定，某些複合形體相關體積觀念尚未建立完整，只是針對他們的需求。

(TS- 討 -206)

對於學習狀況不穩定的學童，體積概念尚未完整建立，憑著直線式的思考模式，未經判斷就解題。再回頭看學童前測複合形體的表現，其計算基礎複合形體的錯誤，雖然多數是算式正確只是粗心計算錯誤，但仍有少數學童在此部份的體積概念尚未清楚。而複雜的複合形體體積題型，多數學童的體積保留及測量概念就更欠缺了，以致在解題中遺漏計算其他切割的體積。

從解題及個別訪談中得知，學童對複合形體體積缺乏清楚概念，在複雜題型解題上，有些學童遺漏計算其他切割的體積，以及無法將複合形體分解算出個別體積的問題及困難。(TS- 討 -209)

學童先備知識的體積保留概念是已經形成，但在複合形體體積的部分並無清楚的概念。A 老師的想法是加深學童的體積保留觀念，有助於學童往後對複合體積的學習，這是研究者所未思慮到的。(TS- 討 -210)

研究者考量本單元教學目標，在於建立學童完整體積概念，學童需具備完整體積保留及測量概念，才能利用「分割」或「填補」法來算出複合形體體積。

(三) 教學情況及過程

柱體底面若為學童熟悉的圖形，即可瞭解柱體體積是底面積與高的乘積。但研究者把底面積換成圓形時，學童就疑惑圓柱體的體積是否也是底面積與高的乘積。

T：這樣推拉，它就是一個長方體，所以體積就是……。

S1：我知道，教過了，底面積乘高。

T：如果底面是梯形的柱體，如何算體積？

S3：梯形面積乘以高。

T：底面是圓形的柱體——圓柱體的體積呢？

(學生疑惑中……)

S2：老師，跟算梯形的一樣嗎？

T：老師以底面是圓形舉例來說明，是要大家瞭解柱體的體積就是底面積乘以柱高。

(TS- 觀 -211)

學童利用算面積的舊經驗來學習體積，可看到學童自動遷移的學習效果，學童會利用學過面積解題經驗，轉換到體積的學習。

單元三：複合形體體積

（一）學習問題診斷

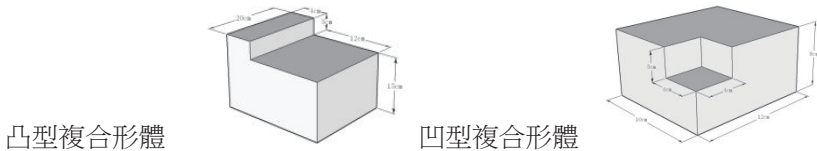
學童在基礎複合形體體積解題，「切割」及「填補」皆選用立體圖形判斷，「切割」及「填補」解題錯誤類型，則是無法理解缺角的體積，欠缺完整的體積減去不要的體積測量概念。本單元教學即針對此學習困難點來設計教學重點。

（二）教學活動設計及修正

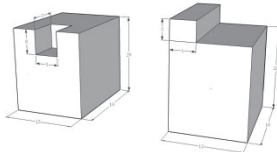
透過 SketchUp 的協助，讓學童體驗複合形體體積合成分解的概念，在凹型複合形體求算出缺角填補的體積，在「填補」解題上比較欠缺的體積減去不要的體積的測量概念。

1. 教師運用 SketchUp 示範基礎複合形體體積教學。

（1）講解範例：



（2）學習單：學童練習複合形體體積計算。



2. 藉由以上教學活動認識 SketchUp 基本推拉功能。

3. 綜合活動：

（1）操作 SketchUp 繪製出凹型及凸型複合形體。

（2）評量測驗。

在設計完教學活動之後，研究團隊討論修正教學。

T：前測有四名學童在基礎複合體積的保留概念都還清楚，主要的錯誤是計算較粗心，S4 在體積保留概念上要再加強。

A：可加入積木實體堆疊，積木實體堆疊是讓學童更能掌握複合形體之構造和體積量感之體驗。再與投影布上的電腦圖形相互搭配，容易看出複合形體體積合成及分解，有助於學童的學習，對於空間概念較差的學童理解上更有幫助。

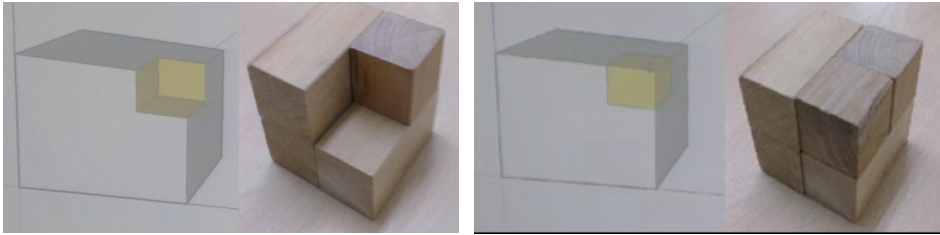
A：前測有學童分解後忘了併計，利用軟體操作經驗建立學童體積保留概念。

B：學習單上學童練習體積計算加入了「比較大小」的提問，體積及量的教學活動，我都有會讓學童做「比較大小」，這也是量的教學活動之最終目的。也再次測試學童對體積文字敘述題的題意瞭解。

(TS-討-301)

(三) 教學情況及過程

利用 SketchUp 繪製凸、凹型及複合形體，與實體堆疊積木相互搭配說明，過程中可發現學童解題策略是多元而非單一的。



S2：老師，這題你用切割法，那我用填補的可以嗎？

T：這題還有另外的解法，誰可以發現？

S1：我知道了，底面是二個大長方形加小長方形，再去乘高。

(TS-觀-312)

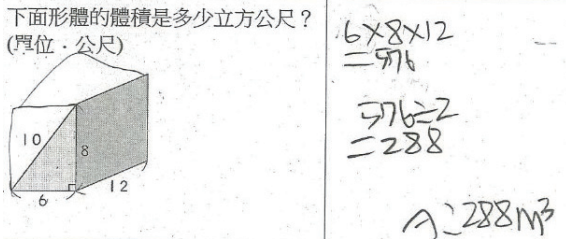
凹型複合形體解題討論，讓 S4 示範實體堆疊積木，幫助他建構出空間的概念，藉由經驗的累積形成體積保留概念。研究者詢問學童範例是否無法使用「底面積 \times 高」策略來解題，大部分學童都同意，可是 S5 學童並不認同。

S5：老師，缺口的體積是 $4 \times 4 \times 5 = 80$ ，挖掉的體積的底面積是 $4 \times 4 = 16$ 高是 5，再使用「底面積 \times 高」，把缺口的體積求出。

(TS-觀-313)

S5 學童在範例所說的「底面積 \times 高」，跟研究者所想的「底面積 \times 高」並不相同，S5 學童的想法是算式中 $4 \times 4 = 16$ ，是缺口小的長方體的底面積，所以 S5 使用「底面積 \times 高」公式算小長方體的體積。這表示學童在看「底面積 \times 高」公式時，是可以靈活多元的運用。

S2 學童在前測第 10 題，忘了三角形公式，用填補法求出三角柱體積。其解題方法是根據經驗判斷底面圖形、填補法、底面積與高的關係。



解題過程： $6 \times 8 \times 12 = 576$ ， $576 \div 2 = 288$ 。

T：你解題的式子 $6 \times 8 \times 12 = 576$ ， $576 \div 2 = 288$ 是怎麼來的？

S2：我把填補成一個長方體，再切成一半。

(S2-訪-328)

從學童 S2 答題和訪談發現，其解題方式繞了一大圈，依面積的學習經驗求出這題，S2 對底面積與高的關係有正確認知，也表示學童具有豐富的操作經驗可以發現多元的解題策略。

單元四：進階複合形體體積

(一) 學習問題診斷

學童在進階複合形體體積的「切割」及「填補」解題，都是選用立體圖形判斷，「切割」及「填補」解題錯誤類型，以遺漏計算其他切割的體積、無法將複合形體分解算出個別體積等錯誤為主。

S4 學童無法辨別底面圖形，顯示 S4 在此部份的體積保留概念及測量概念上是模糊不清的。無法辨別底面圖形、遺漏計算其他切割的體積及無法將複合形體分解算出個別體積，看似不相同的錯誤，其實這些錯誤是互相關連的。因為學童若無法辨別底面圖形，就無法繼續將複合形體分解算出個別體積。

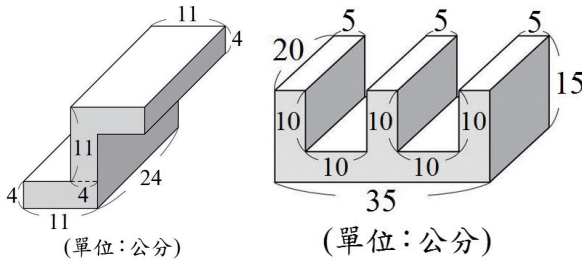
(二) 教學活動設計及修正

本單元教學設計著重於學童在進階複合形體體積的保留概念及測量概念上，透過學童操作 SketchUp 累積的經驗幫助學童釐清體積概念。

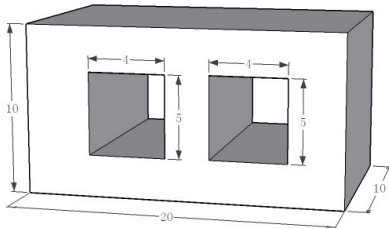
幫助學童解決這些錯誤最重要的關鍵，是讓學童看出複合形體的組成，也就是要有辨別底面圖形的能力。透過 SketchUp 的協助，以翻轉功能讓學童辨別出複合形體的底面圖形。

1. 教師運用 SketchUp 示範進階複合形體體積教學。

(1) 講解範例：前測 19、20 題。



(2) 學習單：學童練習進階複合形體體積計算。



2. 教師複習 SketchUp 翻轉功能操作。

3. 綜合活動：

(1) 操作 Sketchup 觀察學習單的複合形體，並計算體積。

(2) 評量測驗。

在設計完教學活動之後，研究團隊討論修正學習單例題。

T：這個單元要訓練學童看出複合形體的組成，具有辨別底面圖形的能力。

A：可加入積木實體堆疊，讓學童更容易看出複合形體的組成。

B：學習單體積練習，可以利用 SketchUp 操作和觀察，容易讓學童辨別出複合形體的底面圖形，保持長期記憶。

T：學習單上的體積題型，和前測第 20 題有些關連。

A：前測第 20 題是山字型複合形體，學習單上的體積題型是倒 8 字型複合形體，剛好是兩個山字型形體相疊。

T：看看學童會不會發現。

(TS- 討 -401)

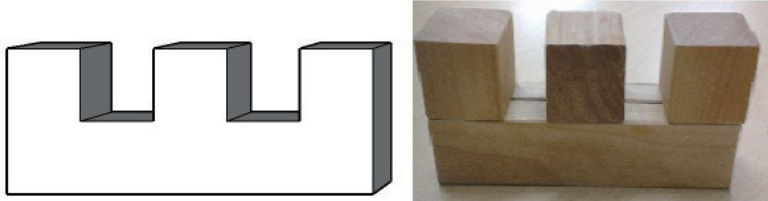
前測第 20 題所提供的資訊及條件，學童可以利用「切割」與「填補」來解題，但前測中有四名學童採用「切割」解題，一名學童在這題無法辨別底面圖形。採用「切割」解題的四名學童，皆犯了遺漏計算其他切割的體積及個別體積併計時計算錯誤等失誤。

A 師認為，在這題山字型複合形體中，不該讓學童認為複合形體體積求解只

有一兩種解題策略，應讓學童利用 SketchUp 觀察，思考發展出自己的解題策略，以發現山字型複合形體用「填補」來解題是較簡單的策略。(TS- 討 -412)

(三) 教學情況及過程

進階複合形體體積的教學活動，研究者併用切割、填補法，利用 SketchUp 繪製複合形體與實體堆疊積木搭配說明。



T: S3、S4 看一下這題範例圖形，分解後和你們前面的積木，可以分成什麼樣的立體圖形。

S4: 可以分成三個長方體。

(TS- 觀 -423)

研究者講解範例，利用 SketchUp 翻轉、角視圖及著色等功能，讓學童辨別底面圖形。

研究者併用切割、填補法，引導學童發現複合形體題型所提供的資訊及條件，進而利用「切割」與「填補」判斷解題，讓解題策略多元化，且簡化問題的複雜性。

S2: 老師，這題你用填補法，我覺得比切割法好計算多。

S1: 切的好像有比較多的計算。

S5: 這題用填補法看來比較簡單。

(TS- 觀 -425)

這次範例討論，學童似乎發現 SketchUp 的翻轉、角視等功能，可以讓他們更容易辨別底面圖形。

研究者認為，複合面積是複合體積的前置經驗，如果學童在複合面積的解題有困難，那麼求算複合形體體積將更加困難。但在前測 S1 學童訪談及與 A 師討論後，學童可以直接計算出來的複合面積再乘以高，沒有想到複合體積是複合面積的延伸學習效果。(T- 思 -407)

單元五、六：銜接的複合形體體積

(一) 學習問題診斷

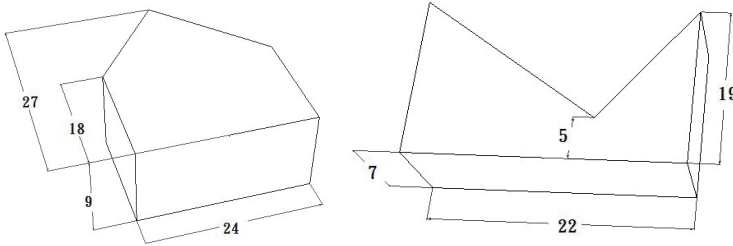
前測銜接部份五題試題中，答對題正確率按學童編號依序為 100%、20%、40%、20%、20%。五名學童在銜接部份複合形體體積答題並不理想，多位學童無法辨別複合形體的底圖，而三角形面積公式計算也少了除 2 的步驟。

(二) 教學活動設計及修正

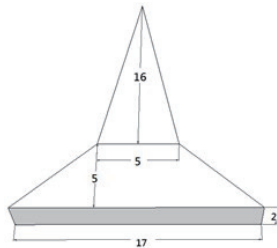
此單元內容為底面是三角形、平行四邊形及梯形，相互堆疊或相減組合而成的複合形體，辨別複合形體底面較有難度。因此教學設計著重學童在銜接複合形體體積的保留概念及測量概念上，透過 SketchUp 操作來判別複合形體的底面形狀，累積判別經驗以幫助學童建立完整的體積概念。

1. 教師運用 SketchUp 示範銜接複合形體體積教學。

(1) 講解範例：前測第 23、24 題。



(2) 學習單：學童練習銜接複合形體體積計算。



2. 教師藉以上活動示範 SketchUp 解題運用。

3. 綜合活動：

(1) 操作 SketchUp 觀察學習單的複合形體，並計算體積。

(2) 評量測驗。

設計教學活動後，研究團隊討論教學修正重點。



T：這單元是指導學童看出複合形體底面圖形。

A：可加入立體模型教具，模型教具上的顏色能與投影布幕上的電腦圖形一樣，主要是讓判別底面能力較差的學童，更容易看出複合形體的組成及分解。

B：從學習單上再讓他們複習三角形面積公式。

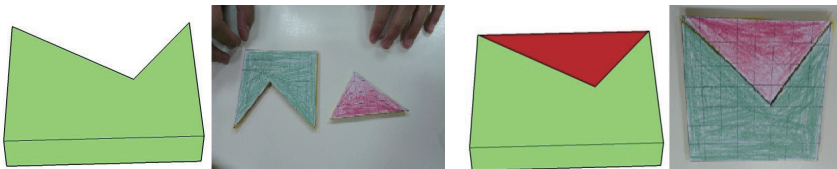
(TS-討-505)

上個單元教學中體會到複合體積是複合面積的延伸學習效果，本單元仍讓學童再次利用「底面積 \times 高」，求複合形體體積的解題策略。

除了操作 SketchUp 來判別複合形體的底面形狀，立體模型教具對於學童來說仍相當重要，透過操作 SketchUp 及立體模型教具去連結「底面積 \times 高」與複合形體之間的關係，經由經驗累積幫助學童往後可以自動進行連結。(TS-討-506)

(三) 教學情況及過程

講解範例由 SketchUp 的翻轉、角視圖及著色等基本功能，讓學童能辨別底面圖形。S3 及 S4 學童操作立體模型搭配如下所示，希望藉著操作經驗加深體積的相關概念，及強化腦中建立起立體圖像。



T：同學們注意看範例，從電腦觀察底面老師把這個底面圖形分解成三角形和長方形。請 S3 告訴老師這題可以如何解答？

S3：三角形加長方形。

(TS-觀-507)

講解完範例後，與學童討論複合形體的底面，除了可分割成三角形及長方形外，再讓學童去思考發現複合形體底面還可以分解成哪些圖形。

T：這題的底面還可以分解成其他的圖形。

S1：我覺得不行了。

T：想想，我們從中間切割試試看。

S2 及 S5 學童互相討論著。

S5：老師，S2 跟我說如果從中間切割，可以分成兩個梯形。

S4：我不知道可以這樣切耶！

(TS-觀-517)

在教學活動過程中，研究者引導學童思考去探索如何分解複合形體底面，學童發覺複合形體底面分解活動，是有趣且不是呆板的。

三、行動研究後學童複合形體體積解題能力分析

(一) 學童複合形體體積答題狀況前後測比較

學童接受 SketchUp 輔助學習後，解題能力皆有明顯進步（如表 10），其中，S2 進步幅度最大，S3 學童成長最少。除了 S1 學童在銜接部份從 100% 降至 80%，學童整體成效與前測相比，在複合形體體積的解題能力皆有進步。

表 10 學童複合形體體積答題狀況前後測比較表

類別	題型 代號	解題 方式	題號 前測					題號 後測						
			S1	S2	S3	S4	S5	1	S1	S2	S3	S4	S5	
先備 知識	QT01	體積概念	1	O	O	O	O	O	1	O	O	O	O	O
		體積概念	2	O	O	O	O	O	2	O	O	O	O	O
	QT02	體積概念	3	O	O	O	X	O	3	O	O	O	O	O
	QT03	體積概念	5	O	O	O	O	O	5	O	O	O	O	O
	QT04	切割或填補	7	O	O	O	O	O	7	O	O	O	O	O
		體積概念	8	O	O	O	O	O	8	O	O	O	O	O
	QT05	體積公式	9	X	O	O	O	O	9	O	O	O	O	O
		底面積乘高	10	O	O	O	O	X	10	O	O	X	X	O
		底面積乘高	15	O	O	O	O	O	15	O	O	O	O	O
	QT06	切割或填補	11	O	X	X	X	X	11	O	O	O	O	O
切割		12	O	X	X	X	O	12	O	O	O	X	O	
切割或填補		13	X	X	O	X	X	13	O	O	O	O	O	
切割		14	O	X	O	X	O	14	O	O	O	O	O	
切割或填補		16	O	O	X	O	O	16	O	O	X	X	X	
切割或填補		17	O	O	O	X	O	17	O	O	O	O	O	
先備知識正確率			87%	73%	80%	60%	80%	100%	100%	87%	80%	93%		
進階 知識	QT02	體積概念	4	X	O	X	X	O	4	O	O	O	O	O
	QT04	切割或填補	6	X	X	O	X	O	6	O	O	O	O	O
	QT07	切割或填補	18	X	O	O	O	X	18	O	O	X	X	O
		切割或填補	19	X	O	X	X	O	19	X	O	X	O	X
QT07	切割或填補	20	X	X	X	X	X	20	O	O	O	O	O	
進階部份正確率			0%	60%	40%	20%	60%	80%	100%	60%	80%	80%		
銜接 知識	QT08	切割	21	O	O	O	O	X	21	O	O	O	X	X
	QT09	切割或填補	22	O	X	X	X	X	22	O	O	O	X	O
		切割或填補	23	O	X	O	X	X	23	X	O	X	X	O
	填補	24	O	X	X	X	O	24	O	O	X	O	O	
	填補	25	O	X	X	X	X	25	O	O	O	O	O	
銜接部份正確率			100%	20%	40%	20%	20%	80%	100%	60%	40%	80%		
總答題正確率			72%	60%	64%	44%	64%	92%	100%	76%	72%	88%		

註：

1. 上表中 O 表示答對，X 表示答錯。
2. 灰色儲存格表示學習者前測答對，後測答錯的情況。

3. 題型代號：

QT01 判斷體積大小

QT02 立方公尺、立方公分關係

QT03 底面積與高的關係

QT04 積木點數

QT05 柱體體積計算

QT06 複合形體體積計算

QT07 長方體及正方體堆疊

QT08 底面為幾何圖形相互堆疊或相減

QT09 Z、V 字型

(二) 教學後學童「切割」及「填補」解題方法分析

比較學童前、後測「切割」及「填補」解題方法(表 11)發現,未使用 SketchUp 教學前,學童在複合形體體積「切割」解題,多以「主要立體圖形」判斷,使用 SketchUp 教學後,「切割」解題則以「主要底面圖形」判斷居多。

而在「填補」解題上,未使用 SketchUp 教學前,以「主要立體圖形」判斷,教學後則以「主要底面圖形」判斷居多。

表 11 教學前後學童「切割」及「填補」解題方法比較表

	解題判斷方法	教學前	教學後	差異
切割	主要立體圖形	37%	20%	-17%
	主要底面圖形	16%	42%	+26%
填補	主要立體圖形	20%	17%	-3%
	主要底面圖形	11%	21%	+10%
空白未寫	無法辨別底面圖形	16%	0%	-16%

由此可見, SketchUp 輔助教學後,不論在「切割」及「填補」解題上,學童為了順利將複合形體分解成個別體積,會先判斷複合形體的底面圖形,先分解算出個別體積後再併計。

(三) 教學後學童「切割」及「填補」解題錯誤類型分析

學童在 SketchUp 輔助教學後,體積保留概念及測量概量多已釐清,已有能力辨別複合形體底面圖形,並思考判斷選擇「切割」及「填補」解題方法,能將複合形體分解算出個別體積,解題過程計算細心度也提升,所以答錯率比前測低。

學童後測「切割」錯誤解題，大多是無法完整將複合圖形分解，再算出個別體積，或三角形面積少除 2，及底面積未乘到「高」等錯誤。而「填補」解題錯誤，則是計算錯誤及底面積未乘到「高」等。

表 12 學童前測在「切割」及「填補」解題的錯誤類型彙整表

方法	錯誤類型	前測	後測
切割	算式正確但計算錯誤	5	2
	遺漏計算其他切割的體積	4	0
	無法將複合形體分解算出個別體積	2	2
	體積單位錯寫成平方單位	2	0
	求出底面積，忽略未乘到「高」	2	2
	求算三角形面積時，公式錯誤少了除 2 的步驟	2	2
	體積單位錯寫成長度單位	1	0
	個別體積併計時計算錯誤	1	1
	無法依題目提供的條件判斷，將複合圖形先做正確的分解	1	0
	不加思考辨別底面圖形錯誤	1	0
填補	算式正確但計算錯誤	3	2
	求算三角形面積時，公式錯誤少了除 2 的步驟	3	1
	未求出缺口填補的體積	2	0
	體積單位錯寫成平方單位	2	0
	求出底面積，忽略未乘到「高」	0	2
空白未寫	無法完整將複合圖形分解，算出個別體積	0	1
	無法辨別底面圖形	9	0
	無法求出缺角的長方體的體積，導致無法解題	2	0

綜合六個單元教學成果，學童都能達到教學目標並具備解題能力，每個單元教學範例透過 SketchUp 示範，引導學童操作 SketchUp，以實際體驗複合形體體積結構，讓學童具有複合形體選擇「切割」或「填補」解題方法的判斷能力。對於學童常見的體積概念常見學習困難，對被測量體缺乏基本認識、體積概念保留性不足、體積概念的視覺偏差印象等（譚寧君，1997），都能獲得改善。

伍、研究結論與建議

本研究旨在瞭解學童在複合形體體積的問題及困難，經由行動研究探討 SketchUp 輔助提升學童學習複合形體體積「切割」與「填補」的解題能力，透過參與觀察、訪談及測驗評量等方式，蒐集相關資料，整理研究結果獲得以下結論：

一、研究結論

（一）複合形體體積單元教學軟體應用功能不宜過多



SketchUp 融入複合形體體積教學中所介紹的功能不宜過多，以免增加學童額外的學習負擔，本研究教材設計著重視圖、翻轉及著色等簡易功能，這些功能可幫助學童觀察複合形體體積，有助於判別底面能力較差的學童累積操作經驗，進而理解複合形體的組成及分解策略。教材內容應由簡至繁設計，先複習基礎的複合圖形面積計算，再逐漸提升至複合圖形分解與組合。學童經由 SketchUp 的操作，可觀察複合形體結構，再利用「切割」或「填補」方法分解成熟知的長方體或正方體，學童在累積教學示範的 SketchUp 操作經驗後，就能善用 SketchUp 工具來選用合適的複合形體「切割」與「填補」的解題方式。

（二）SketchUp 融入複合形體體積教學可提升學童解題能力

不易判別解題型式的複合形體，學童透過 SketchUp 的輔助累積操作經驗，增強其對於複合體積的分解與組成能力。不論在「切割」或「填補」解題，學童都可以輕易判斷複合形體的組成及分解方式，分解組成的方法也愈來愈多元與富有變化性。SketchUp 的輔助改變學童以直觀視覺方式判斷複合形體的解題，提升學童空間感受，使得抽象的平面圖像活化成具體的立體圖像，學童得以清楚辨識各種複合形體的特性，進而喚醒相關的先備經驗，豐富其複合形體解題策略的思考途徑。

（三）SketchUp 融入複合形體體積教學可釐清學童迷思概念

學童學習體積常見的迷思概念，是不知體積是物件占空間的大小，此緣於傳統教學無法滿足學童對於各種複合形體的實體觀察，就算使用實體模型輔助，也受限於複雜的複合形體結構而無法呈現。操作 SketchUp 可以建立完整的體積概念，學童可以在視覺上清楚保留及測量體積印象，協助其澄清原先對於體積的各種迷思概念。

二、研究建議

根據本研究結果及發現，研究者針對教學和未來研究提供建議，供教師及相關研究者參考：

（一）診斷複合形體面積解題能力以銜接複合形體體積的學習

複合面積深深影響學童的複合體積學習，學童對於較複雜的複合體積，解題策略大多先辨別複合形體底面圖形，將複合形體的底面圖形算出複合面積，再乘以高來得出複合體積，因此教學前有必要先瞭解學童對於面積概念、面積公式及複合面積的程度，再決定複合形體體積教學活動的設計。

（二）善用 3D 繪圖軟體觀察複合形體有助於體積學習

學童對於複合形體體積的解題，常會遺漏計算其他切割的體積，及無法將複合形體分解算出個別體積。這是由於缺乏清楚的體積保留概念所致，經由 SketchUp 的應用，學童從軟體操作過程中能清楚瞭解複合形體的底面圖形及組成，可以具體觀察複合形體的內容，增加其空間辨識效果，有助於複合形體體積的學習，並加深學童的體積保留觀念，有助於學童往後對複合體積的學習。

參考文獻

- 王全興（2007）。資訊科技融入數學教學之課程行動研究。中等教育，58（6），36-55。
- 左臺益（2012）。標題動態幾何系統的概念工具來源。中等教育，63（4），6-15。
- 吳重言（2013）。互動式視覺化軟體融入國小複合形體表面積教學成效之研究。未出版之碩士論文，國立臺南大學科技發展與傳播研究所，臺南市。
- 李俊儀、袁媛（2004）。資訊科技融入數學教學模組之開發與研究以國中平面幾何基礎課程教學為例。花蓮師院學報，19，119-142。
- 林佳蓉、林祐鉅、陳久正（2013）。發展教師 Avatar 與 Google SketchUp 立體空間數位教材之初探性研究：以學習落後學童為個案。教育科技與學習，1（1），111-136。
- 姚文仁（2007）。國中三角形相關概念 GSP 補救教學之成效研究。未出版之碩士論文，國立高雄師範大學數學系研究所，高雄市。
- 施保成（2011）。以 3D 電腦輔助設計軟體 Google SketchUp 融入國小複合形體表面積教學對學生數學學習成效之研究。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學資訊教育學系研究所，臺北市。
- 莊振中（2004）。製圖科學生應用 3D 電腦繪圖軟體學習立體圖在空間能力表現之研究。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學工業教育學系研究所，臺北市。
- 陳禾凱（2016）。用 Google SketchUp 來畫常見的數學立體物件。檢自：<https://goo.gl/JBrbUp>
- 陳冠宇（2012）。3D 電腦圖形軟體於國小學童數學空間幾何補救教學之行動研究。未出版之碩士論文，私立南華大學資訊管理學研究所，嘉義縣。
- 陳姜穎（2005）。三維數學動畫。未出版之碩士論文，私立靜宜大學應用數學研究所，臺中市。
- 陳鴻綸、曹雅玲（2005）。國小學童在幾何問題的解題表現研究——長方體的體積和表面積為例。國教新知，52（4），65-78。
- 進學國小編（2016）。臺南市進學國小成效評估。檢自：<https://goo.gl/UfAvxz>
- 黃雅琪（2007）。國民小學五年級學童幾何學習表現之研究。未出版之碩士論文。



- 國立屏東教育大學數理教育研究所，屏東市。
- 楊志偉（2012）。以 Google SketchUp 進行國中正投影圖學學習成效之研究。未出版之碩士論文，國立臺灣師範大學圖文傳播學系研究所，臺北市。
- 楊凱翔、葉淑珍、譚寧君（2014）。建立立體心像教學活動之國小體積課程設計本位研究。國立臺灣科技大學人文社會學報，10（3），225-252。
- 葉麗鳳（2008）。國小五年級學童體積概念之研究。未出版之碩士論文，國立臺中教育大學教育測驗統計研究所，臺中市。
- 鄭美玲（2015）。國小六年級學生表面積與體積「量的公式概念」調查之研究。國民教育，55（4），73-90。
- 謝國燁（2007）。初探 3D 世界——Google SketchUp 運用於生活科技教學。生活科技教育月刊，40（4），57-65。
- 譚寧君（1996）。面積與體積的教材分析。在教育部臺灣省國民學校教師研習會編，國民小學數學科新課程概說（中年級）協助兒童認知發展的數學課程（頁 175-192）。臺北：編者。
- Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, 42(2), 291-310.
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.
- Erkoc, M. F., & Erkoc, C. (2012). *An open source virtual manipulative for teaching 3 dimensional geometric objects: Google SketchUp*. EDULEARN12 - 4th Annual International Conference on Education and New Learning Technologies, At Barcelona, Spain.
- Kurtulus, A., & Uygan, C. (2010). The effects of Google Sketchup based geometry activities and projects on spatial visualization ability of student mathematics teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 9, 384-389.
- Liveri, A., Xanthacou, Y., & Kaila, M. (2012). The Google SketchUp software as a tool to promote creativity in education in greece. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 69, 1110-1117.
- Oldknow, A., & Tetlow, L. (2008). Using dynamic geometry software to encourage 3D visualization and modelling. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 2(1), 54-61.
- Panorkou, N., & Pratt, D. (2016). Using Google SketchUp to develop students' expe-

riences of dimension in geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(3), 199-227.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1974). *The child's construction of quantities: Conservation and atomism*. London: Routledge and Kegan Paul.

Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293-1319.

Action Research on SketchUp Applied to Compound Volume Volume "Cutting" and "Filling" Assistant Problem Solving Effects

Tung-Chung Tsai

Associate Professor

National Taitung University Department of Education

Ming-Jen Chih

Master

National Taitung University Department of Education

Abstract

The purpose of this study was to explore how Google SketchUp can help children to learn complex body volume of "cutting" and "fill" problem solving methods and types of errors in order to enhance the ability of students to solve complex volume problems. The study consisted of five cohorts of volume units taught by five fifth-graders. The study consisted of observation, interview and study. The results of the study showed that the concept of "volume retention and measurement" was not well understood by the students. They were wrong in "segmentation" and "filling", missing the volume of other cuts and not being able to judge the bottom of the composite body. In the segmentation and fill- , Students can use the direct observation of the three-dimensional graphics method to judge; through Google SketchUp assisted teaching, can help students think and then develop their own problem-solving strategies, students in the "split" and "fill" error types, mostly clarified, Split "and" fill "problem-solving methods, students change to the bottom of the graphics to determine, with the composite body is broken down into individual volume capacity, thereby enhancing the volume in the complex problem-solving ability.

keywords: volume of composite solids, the volume unit in math, Google SketchUp



